UNIVERSIDAD DE MEDELLÍN
Departamento de Ciencias Básicas

Programa de inducción 2006-2007

PENSAMIENTO Y CONOCIMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO [1]

...Y se le ha dado al hombre
el más peligroso de los bienes
el lenguaje, para que con él
cree y destruya
... para que muestre lo que es, ...

F. Holderlin

Dentro de la programación para la inducción a los estudiantes aspirantes a ingresar a alguno de los programas que ofrece la Universidad de Medellín, se han tenido en cuenta algunos encuentros con una duración de dos horas cada uno, que hacen referencia al pensamiento y conocimiento lógico matemático. Con esta actividad se busca motivar a los estudiantes para que se den cuenta de la importancia de este aspecto en su formación académica y al mismo tiempo identifiquen las carencias matemáticas en los elementos previos de las mismas.

Objetivos

1. Comprender la lectura de un texto y con base en ella responder adecuadamente las preguntas formuladas.

2. Relacionar las lecturas dadas y darse cuenta de la importancia que tienen con el desarrollo del pensamiento lógico matemático.

3. Efectuar correctamente operaciones elementales correspondientes a la aritmética y al álgebra.

4. Revisar contenidos matemáticos básicos que son elementos previos a los cursos de matemáticas del primer nivel

Metodología de trabajo

Para cada sesión se cuenta con un material, cuidadosamente seleccionado, de acuerdo a los objetivos propuestos. Cada estudiante tendrá acceso a esta información que leerá cuidadosamente para posteriormente compartirla con sus pares, en una actividad donde el profesor aportará unas pautas de trabajo, para que la sesión sea dinámica y la mayor parte de la actividad sea realizada por los estudiantes.

---

[1]. Material de trabajo preparado por los profesores del Departamento de Ciencias Básicas: CARMEN SÁNCHEZ Z., JOSÉ A. RÚA V., RAFAEL ÁLVAREZ J., FRANCISCO MEJÍA D., ELKIN ARIAS L., GABRIEL REBAGE M., OSVALDO GUARÍN F., OSCAR CEPEDA G., GUILLERMO AGUILAR M., JOSÉ TORRES A., JAIRO RIVILLAS M., JORGE BEDOYA B., JORGE LONDOÑO M.

ACTIVIDAD 1

Sir Héctor, el heroico matador de dragones [2]

Sir Héctor vivió en un reino remoto durante una época ya olvidada. Él y sus compañeros de armas corrieron muchas aventuras y realizaron grandes hazañas.

1. Un Torneo

Los dragones de la tierra habían empezado a perder el miedo y constituían una seria amenaza para los animales de las granjas así como para los aldeanos más vulnerables. Así las cosas, el rey proclamó un torneo. En un periodo de tiempo concreto, el amanecer o el anochecer, los caballeros debían enfrentarse de forma audaz con tantos dragones como pudieran y bien acabar con ellos o bien atemorizarlos de tal manera que optaran por retirarse a lugares lejanos. El reputado ganador del torneo recibiría un gran premio.

La víspera del torneo dos caballeros se adelantaron en el monte, donde habitaban muchos de los dragones que merodeaban por aquellos rumbos. Y acamparon para pasar la noche a fin de gozar de una cierta ventaja con respecto a los demás caballeros.

El ganador de esta prueba fue Sir Héctor o Sir Hábil o Sir audaz o Sir galante. A partir de los enunciados que siguen ¿quién fue el ganador del torneo?

1. Si Sir Hábil ganó el torneo, entonces únicamente centró sus esfuerzos en los dragones más grandes de la tierra.

2. Si Sir Héctor ganó el torneo, entonces sin duda no olvidó su escudo.

3. Si sir Galante venció en el torneo, entonces fue el único caballero que acampó en el monte para pasar la noche.

4. Sir Héctor era un cocinero excelente, y durante la noche que pasó en el monte disfrutó de una opípara cena.

5. Sir Hábil hubo de abandonar cuando su ratón cautivo, que usaba de reclamo para atraer a su presa, consiguió escapar.

6. Si Sir Héctor recordó llevar a su escudo consigo, entonces su escudero olvidó empaquetar su comida.

	Sir Hábil	**Sir Audaz**	**Sir Galante**	**Sir Héctor**
Ganador				

Marque las casillas con un signo más o menos según avance en sus conclusiones.

---

[2] . WILLIS, Norman D. ***Juegos de ingenio 6.*** Santafé de Bogotá: Ediciones Robinbook, Sl, 2003. 204 p.

2. En busca de aventuras

Deseosos de nuevas emociones, sir Héctor, sir Hábil, sir Audaz y sir Galante partieron en busca de aventuras. En el transcurso de sus viajes, dos de ellos batallaron con dragones, uno lucho contra un gigante y otro tuvo un enfrentamiento con un hechicero.

A partir de los siguientes enunciados, ¿Qué caballero vivió cada una de las aventuras citadas?

1. Si sir Galante no se enfrentó al hechicero, entonces sir Héctor luchó con el dragón.

2. Si sir Héctor no luchó con el gigante, entonces sir Hábil combatió con el gigante.

3. Sir Audaz se enfrentó al hechicero si no luchó con el gigante.

	Dragones	**Gigante**	**Hechicero**
Sir Hábil			
Sir Audaz			
Sir Galante			
Sir Héctor			

3. Duelos con la espada

En el transcurso de un torneo, sir Héctor, sir Hábil, y sir Audaz se vieron implicados en un duelo con la espada. Dos de los caballeros salieron victoriosos de sus duelos y el tercero fue derrotado. ¿Cuáles caballeros vencieron y cuál fue el caballero que salió derrotado?

1. Sir Hábil ganó su duelo si sir Héctor perdió el suyo.

2. Si sir Héctor salió victorioso en su duelo, entonces sir Audaz perdió su duelo.

3. Sir Hábil fue derrotado en su duelo si sir Audaz venció en el suyo.

	Sir Hábil	**Sir Audaz**	**Sir Héctor**
Ganador			
Perdedor			

4. Asesinato en el castillo negro

Era una noche oscura, densa, ventosa y muy lluviosa, cuando la casualidad quiso que tres caballeros que no se conocían se encontraran frente a un castillo negro lúgubre. Recelaban los unos de los otros pero tal como era su costumbre, decidieron acercarse al castillo para buscar un refugio donde pernoctar.

Los recibió un criado de rostro amargo quien les explicó que el señor ya se había retirado a sus aposentos si bien todas sus necesidades serían satisfechas. A continuación se les sirvió comida y les fueron asignadas tres habitaciones distintas.

En algún momento de la noche se cometió un asesinato. Este crimen podía ser en cierto modo considerado inusual, no sólo porque se desconoce el culpable sino porque la identidad de la víctima tampoco está muy clara. Por fortuna, la lista de posibles culpables y víctimas puede reducirse a cinco personas: el criado, el señor y los tres caballeros.

Dadas las siguientes pistas, ¿Quién fue la víctima y quién el culpable?

1. Si el caballero que ocupaba la habitación 1 fue el culpable, el caballero de la habitación 3 fue la víctima.

2. Si el caballero de la habitación 2 fue la víctima, entonces el criado fue el culpable.

3. Si el caballero de la habitación 3 fue la víctima, el caballero de la habitación 2 fue el culpable.

4. Si el criado fue el culpable, la víctima coincide con el caballero de la habitación 3.

5. El criado no pudo ser encontrado hasta la mañana siguiente, y no pudo proporcionar una coartada creíble.

6. Si el caballero de la habitación 3 fue el culpable, entonces el caballero de la habitación 2 fue la víctima.

7. Si el caballero de la habitación 2 fue el culpable, el criado fue la víctima.

	Victima	**Culpable**
Habitación 1		
Habitación 2		
Habitación 3		
Criado		
Señor		

5. El misterioso bribón enmascarado

Un misterioso bribón enmascarado era el mayor azote de sir Héctor. Era del tipo villano clásico, un ser culpable de muchas fechorías horribles. Finalmente sir Héctor consiguió dar con él y ambos se vieron las caras, preparados para una lucha a muerte. Esto sucedió por la mañana, poco después del mediodía o a media tarde.

Tomando en consideración los enunciados que siguen, ¿Cuál fue el desenlace del enfrentamiento?

1. Si sir Héctor logró arrancar la máscara del bribón y quedó abrumado ante la visión del rostro del mal, entonces el duelo ocurrió por la mañana.

2. Si los caballeros amigos de sir Héctor llegaron justo a tiempo para salvarlo, entonces todo ocurrió después del mediodía.

3. Si fue por la mañana, entonces sir Héctor había olvidado su espada y en consecuencia no presentó batalla.

4. Si sucedió a media tarde, entonces los caballeros amigos de sir Héctor llegaron en el instante preciso para salvarlo.

5. Si fue poco después del mediodía, entonces sir Héctor arrancó la máscara del bribón y quedó abrumado ante la visión del rostro del mal.

	Abrumado	**Llegaron los caballeros**	**Olvido la espada**
Sir Héctor			
Bribón			

6. ¿Quién vio a qué gigante?

En su mayoría, los gigantes de la tierra eran criaturas pacíficas con escasa tendencia a buscarse problemas. Sin embargo, un gigante solitario de dudosa identidad había estado robando animales de las granjas por las noches, causando con ello una gran alarma entre los granjeros de la zona. Sir Héctor, sir Hábil y sir Audaz ofrecieron sus servicios para identificar al culpable, dado que los tres habían visto al ladrón. No obstante, sus testimonios apuntaban a dos sospechosos distintos: el gigante número uno y el gigante número dos.

Cuando se ha cometido un crimen, de todos es bien sabido que los testigos suelen tener cierta dificultad para describir lo que vieron con un alto grado de precisión. Seguidamente se presentan cuatro enunciados derivados de las descripciones que de lo visto aportaron los tres caballeros ya mencionados, así como algunas inferencias tanto de las precisiones como de las imprecisiones de sus observaciones:

1. Si el gigante número uno fue el culpable, entonces la descripción de sir Héctor se ajustaba a la realidad.

2. Si la descripción que dio sir Hábil era inexacta, entones el gigante número dos fue el culpable.

3. Si la descripción de sir Audaz era exacta, entonces la aportada por sir Héctor era imprecisa.

4. Si la descripción de sir Héctor era exacta, entonces la de sir Audaz era así mismo exacta.

¿Cuál de los dos gigantes fue el culpable?

	Gigante Nº 1	Gigante Nº 2
Culpable		

7. El mayor desafió de sir Héctor

Sir Héctor ha tenido muchas y muy grandes aventuras, algunas verdaderos desafíos. Al preguntarle cuál de ellas había constituido su mayor desafío, el valiente caballero sólo consiguió reducir su lista a cinco peripecias. En ella incluía su encuentro con el gigante Grimsby, el enfrentamiento con el hechicero, el enfrentamiento con el misterioso bribón enmascarado, la lucha con el dragón antiguo y el rescate de la torre negra, no necesariamente en ese mismo orden.

De los enunciados que siguen, ¿puede usted determinar cual de las aventuras de sir Héctor constituyó su mayor desafío?

1. Si ni el encuentro con el gigante Grimsby ni el enfrentamiento con el misterioso bribón enmascarado fueron el mayor desafío, entonces el combate con el dragón antiguo se situó en segundo lugar.

2. Si el enfrentamiento con el dragón antiguo fue su segundo mayor desafío, entonces ni el rescate de la torre negra ni el enfrentamiento con el hechicero fueron su mayor desafío.

3. Si ni el encuentro con el gigante Grimsby ni el enfrentamiento con el hechicero fueron el segundo desafío más importante, entonces bien el enfrentamiento con el misterioso bribón enmascarado o bien el combate con el dragón antiguo fueron el mayor desafío.

4. Si el enfrentamiento con el hechicero fue el segundo desafío en importancia, entonces el rescate de la torre negra fue el mayor de todos ellos.

	Mayor desafío
Dragón	
Bribón	
Gigante	
Torre	
Hechicero	

8. Cuatro hermosas damiselas en apuros

En todos los confines de la tierra sir Héctor era famoso por sus rescates de hermosas damiselas en apuros. Se decía que había rescatado a cuatro: la doncella Marie, la doncella Mary, la doncella Morgana y la doncella Matilda. Una fue rescatada del torreón de un castillo donde era cautiva de un hechicero, una segunda de la guarida de un dragón, una tercera de dos gigantes que se la disputaban, y la cuarta y última del escondrijo del misterioso bribón enmascarado.

A partir de los enunciados que se aportan deduzca cuál damisela fue rescatada de cada uno de sus captores.

1. Si la doncella Morgana no fue rescatada del escondrijo del bribón, entonces la doncella Marie fue rescatada del torreón del castillo.

2. La doncella Matilda fue rescatada del escondrijo del bribón, salvo que la doncella Mary regresara a casa por sus propios medios tras permanecer cautiva en la guarida del dragón.

3. Si la doncella Marie fue rescatada del torreón del castillo, entonces la doncella Mary fue rescatada de los dos gigantes.

4. Si la doncella Matilda no fue rescatada del escondrijo del bribón, entonces tampoco lo fue la doncella Morgana.

	2 gigantes	**Castillo**	**Dragón**	**Bribón**
Doncella Marie				
Doncella Mary				
Doncella Matilda				
Doncella Morgana				

9. Encuentro con una criatura gigantesca y parecida a una serpiente

Los granjeros de la tierra se habían quejado penosamente de una criatura gigantesca y semejante a una serpiente que comía su ganado así como sus niños y sus mascotas. Sir Héctor, sir Galante, sir Resuelto tenían la firme determinación de enfrentarla y acabar con la vida de tan feroz y despiadada bestia.

Cuando encontraron a la criatura, no les pareció tan feroz ni tan grande como algunos la habían descrito. Así pues, los tres decidieron que un solo caballero bastaría para desterrar tan aterradora amenaza. Uno de los caballeros regresó a casa, otro luchó con la criatura, y el tercero permaneció allí para observar el combate. Tras una breve escaramuza, la criatura accedió a abandonar el lugar

por las buenas. Posteriormente, los heroicos caballeros iniciaron su regreso y recibieron con agrado las adulaciones de los granjeros.
¿Cuál de los caballeros se enfrentó realmente a la criatura?
¿Cuál se quedó a observar? ¿Cuál de ellos regresó a su casa?

1. Si sir Galante luchó con la criatura, entonces sir Héctor observó el suceso.

2. Si fue sir Héctor quien combatió, entonces sir galante regresó a casa.

3. Si sir Galante se fue a su casa, entonces sir Resuelto permaneció observando.

4. Si sir Resuelto observó, entonces sir Galante participó en la lucha.

5. Si sir Héctor observó, entonces sir Resuelto participó en el combate.

	Luchó	**Observó**	**Regresó a casa**
Sir Héctor			
Sir Galante			
Sir Resuelto			

10. El enfrentamiento con el gigante

Un feroz gigante robaba el ganado y atemorizaba a las gentes de la tierra. Sir Héctor y sus camaradas caballeros, sir Hábil, sir Audaz, sir Galante, sir Resuelto y sir Víctor, decidieron que dos de ellos deberían enfrentarse a este gigante y expulsarlo de la tierra, los dos aventureros tomaron sus armas y se aprestaron a entrar en combate.

Al acercarse al gigante, se suscitó una breve pero encarnizada batalla. fue en ese preciso instante cuando el gigante pareció pensar que le convenía buscar fortuna en algún otro lugar, otra tierra donde no hallara tanta resistencia, y rápidamente se batió en retirada, partiendo hacia lo desconocido. A partir de los enunciados que figuran a continuación, ¿cuáles fueron los dos caballeros que se enfrentaron al gigante?

1. Si, ni sir Héctor ni sir Víctor se enfrentaron al gigante, entonces sir Galante lo hizo.

2. Si sir Galante y sir Víctor se enfrentaron al gigante, entonces no fue sir Hábil.

3. Si, ni sir Hábil ni sir Héctor se enfrentaron al gigante, entonces fue sir Resuelto quien lo hizo.

4. Si, ni sir Audaz ni sir Hábil se enfrentaron al gigante, entonces sir Víctor lo hizo.

5. Si fue sir Héctor quien se enfrentó al gigante, entonces sir Galante o sir resuelto lo hicieron.

6. Si sir Víctor no fue uno de los dos caballeros que se enfrentaron al gigante, entonces ni sir Hábil ni sir Resuelto lo hicieron.

	Héctor	Hábil	Audaz	Galante	Resuelto	Víctor
Héctor						
Hábil						
Audaz						
Galante						
Resuelto						
Víctor						

11. Victoria en el gran torneo

Sir Héctor, sir Hábil, sir Audaz, sir Galante y sir Resuelto participaban en un gran torneo anual que atraía a los caballeros más diestros de toda la tierra. Dos de los cinco valientes caballeros salieron victoriosos de todos sus combates y, puesto que ninguno de ellos estaba dispuesto a competir con un camarada, decidieron compartir el gran premio.

De las afirmaciones que siguen deduzca quienes fueron los dos vencedores.

1. Si sir Galante salió victorioso, entonces sir Héctor no salió victorioso.

2. Si sir Hábil no salió victorioso, entonces sir Galante no salió victorioso.

3. Si sir Héctor salió victorioso, entonces sir Audaz no salió victorioso.

4. Si sir Resuelto salió victorioso, entonces sir Hábil salió victorioso.

5. Si sir Audaz salió victorioso, entonces sir Hábil no salió victorioso.

6. Sir Resuelto salió victorioso sólo si sir Héctor salió asimismo victorioso.

	Vencedor
Sir Hábil	
Sir Audaz	
Sir Galante	
Sir Héctor	
Sir Resuelto	

12. Los adversarios de los caballeros

Sir Héctor, sir Hábil, sir Audaz y sir Galante eran todos caballeros especialmente diestros en el combate con determinados tipos de adversarios. Para uno de ellos se trataba de las serpientes gigantes, para otro los dragones, para otro los gigantes, y para el último los hechiceros.

Basándose en los enunciados que siguen, determine cuál caballero era el más diestro en el combate con cada tipo de adversario.

1. Si sir Hábil era el más capaz a la hora de enfrentarse a los dragones, entonces sir galante era el más competente en el combate con los gigantes.

2. Si sir Audaz era el más diestro en la lucha con los gigantes, entonces sir Héctor era el más preparado para el enfrentamiento con los hechiceros.

3. Si sir Audaz era el más diestro en el enfrentamiento con los hechiceros, entonces sir Hábil era el más competente con los dragones.

4. Si sir Galante no era el más diestro en la lucha con los dragones, entonces sir Héctor era el más competente en la lucha con los gigantes.

5. Si sir Galante era el más diestro en el enfrentamiento con las serpientes gigantes, entonces sir Audaz no era el más preparado para el combate con los dragones.

6. Si sir Héctor era el más capaz en el enfrentamiento con los hechiceros, entonces sir Hábil era el más diestro en el combate con los gigantes.

7. Si sir Hábil era el más diestro en el combate con los gigantes, entonces sir Galante era el más competente en el enfrentamiento con los hechiceros.

	Dragones	**Gigantes**	**Serpientes**	**Hechiceros**
Sir Hábil				
Sir Audaz				
Sir Galante				
Sir Héctor				

ACTIVIDAD 2

Razonamiento lógico matemático

1. El problema del lógico

Un hombre que recorría un territorio selvático fue capturado por un grupo armado de la región quienes lo condujeron a una celda con dos puertas, cada una custodiada por dos guardias. Cuando por fin el jefe del grupo visita al hombre, le ofrece las siguientes opciones para buscar su libertad.

“Una de las puertas que usted ve conduce a una muerte segura, y la otra lo llevará a la libertad, yo no tengo forma de sostener prisioneros, así que usted deberá elegir una de ellas; para ayudarlo a tomar una decisión le daré la opción de que haga una única pregunta que deberá responder cualquiera de los dos guardias, pero deberá tener presenta que uno de ellos siempre dice mentiras y el otro solo dice la verdad”.

¿Qué pregunta formularía usted, que le garantice salvar la vida?

2. Equipo de cuatro jugadores

Un entrenador está tratando de conformar un equipo de cuatro jugadores para un torneo de tenis. Dispone de siete jugadores con igual capacidad en el juego, Juan, Carlos, Roberto, Ana, María, Carmen y Elvira. Si el equipo debe estar conformado al menos por dos hombres y los siguientes jugadores no pueden estar en el mismo equipo:

a. Carlos no puede jugar con Ana.
b. Roberto no puede jugar con Elvira
c. Ana no puede jugar con Carmen.

Utilice la anterior información para dar respuesta a las siguientes preguntas:

1. Si se sabe que Carmen está en el equipo y que Carlos no jugará ¿cuál será el equipo?

2. Si Ana pertenece al equipo, ¿cuáles son los integrantes de éste?

3. ¿Pueden estar Carlos y Elvira en un mismo equipo?

4. ¿Si juega Ana jugará también Juan?

5. ¿Podrán jugar juntas Ana y María?

3. El premio

Si usted me dice una frase yo le daré un premio de la siguiente manera: si la frase es verdadera, tengo dos tipos de premios, el A y el B, donde el A es mejor que el B; si usted me dice una frase falsa, yo le doy un premio de consolación que llamaremos C

Utilice razonamientos lógicos para que su frase me obligue a darle el premio A

4. El espía

En una fila de tres casas vive un espía. En cada una de éstas viven tres personas: un chino, un español y un inglés. Cada uno de ellos ejerce una única actividad. Con el fin de evitar un enojoso incidente diplomático, antes de iniciar una acción cualquiera, habrá que saber cuál es la nacionalidad del que ejerce la actividad de espía. Se sabe sin embargo, que el inglés reside en la casa del centro, que el chino es músico y que el espía ocupa la primera vivienda. ¿De qué nacionalidad es el espía?

5. Caras de colores diferentes

Un cubo tiene sus seis caras de colores diferentes. El lado blanco es opuesto al negro. El lado rojo está entre el blanco y el negro. El lado azul es adyacente al verde. El lado café es adyacente al azul y, el lado blanco está boca abajo, entonces:

a. El lado opuesto al café es:
b. Los colores adyacentes al rojo son:
c. El color del lado de arriba es:

6. Litigio entre Protágoras y Eulato

Protágoras fue un maestro que vivió en Grecia en el siglo V a.c. Enseñaba muchas disciplinas, pero se especializaba en alegatos dirigidos a jurados.

Eulato quería llegar a ser abogado. Pero, como no podía pagar los honorarios correspondientes, hizo un acuerdo con Protágoras por el cual éste le daría las lecciones, pero no recibiría el pago hasta que Eulato no ganase su primer caso. Cuando Eulato terminó sus estudios, demoró la iniciación de su práctica profesional.

Cansado de esperar vanamente por el pago, Protágoras abrió juicio contra el ex – discípulo por el cobro de los honorarios que éste le adeudaba.

Eulato hizo su propia defensa ante la corte. Cuando comenzó el juicio, Protágoras presentó su versión del caso de la siguiente manera:

“Si Eulato pierde este caso, entonces debe pagarme (por decisión del tribunal); si lo gana, debe pagarme igualmente (por los términos del contrato). Este caso debo ganarlo o perderlo; de cualquier forma debe pagarme”.

La situación parecía mala para Eulato, pero éste había aprendido muy bien el arte de la retórica. Como réplica presentó ante la corte el siguiente razonamiento:

“Si gano este caso, entonces no tengo que pagar a Protágoras (por decisión de la corte); si pierdo, tampoco tengo que pagar a Protágoras (por los términos del contrato, pues entonces no habré ganado mi primer caso). Este caso debo ganarlo o perderlo, de cualquier forma, no tengo que pagar a Protágoras".

De haber sido usted el juez, ¿cuál habría sido su decisión?

ACTIVIDAD 3

Conocimientos matemáticos--Aritmética

CONJUNTOS NUMÉRICOS[3]

Los conjuntos numéricos son de gran importancia en matemáticas, porque referencian cualquier evento matemático que quiera discutirse, explicarse o resolverse. La construcción de algunos de ellos nació de la imposibilidad de cálculo, por limitaciones algebraicas, en otros conjuntos menos extensos.

La definición de los números naturales ha permitido sentar la base sobre la cual se levanta toda la estructura del edificio de los conjuntos numéricos, hasta llegar al conjunto mayor o universal de todos ellos: los números complejos. Estos últimos son una extensión de los números reales, conjunto sobre el cual se sustenta gran parte del trabajo en el álgebra y el cálculo.

Ejercicios sobre conjuntos numéricos

Escribir V (verdadero) ó F (falso), según las siguientes afirmaciones. En todos los casos justificar la respuesta.

1) ______ todo número natural es un número real.

2) ______ 2.3 es un número racional.

3) ______ todo número real es un número complejo.

4) ______ todo número entero es un número irracional.

5) ______ existen números irracionales que no son números reales.

6) ______ -10 es un elemento de Z, pero no es un elemento de N

7) ______ todo número entero es un número racional.

8) ______ todos los números enteros son naturales.

9) ______ π es un elemento de R, pero no es un elemento de N

---

[3] Tomado de MATEMÁTICA BÁSICA. Rafael Álvarez J. Horacio Fernández C.

10)______ 2.7182818281…. es un número irracional.

11)______ Algunos números irracionales son racionales.

12)______ Ningún número entero es complejo.

13)______ $0 \in \mathrm{C}$

14)______ $\dfrac{2}{\sqrt{2}} \in \mathrm{Q}'$

15)______ $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} \notin \mathrm{Z}$

16)______ π es un elemento de R

17)______ $i^9 \in \mathrm{Q}$

18)______ $e = 2.718281\mathrm{K} \notin \mathrm{Q}'$

19)______ $\dfrac{3}{7}$ es un elemento de Z

20)______ $\sqrt[4]{-81} \in \mathrm{R}$

21)______ $\sqrt[3]{2}\,.\sqrt[3]{4} \in \mathrm{Q}$

22)______ 63 es un número primo

23)______ $(2+i)(2-i)=3$

24)______ $\mathrm{Q}\ \mathrm{Y}\ \mathrm{Q}' = 0$

25)______ $\sqrt[3]{-8} \in \mathrm{N}$

26)______ $-\dfrac{2}{5}$ es un elemento de Q

27)______ $3.\overline{26} \in \mathrm{Q}$

28)______ $\pi \in \mathrm{N}$

29)______ $\sqrt[3]{-27} \notin \mathrm{Z}$

30)______ $e^0 \in \mathrm{Z}$

31)______ $\sqrt{13}$ es un elemento de R

32)______ $\sqrt{7}$ es un número racional

33)______ $0.15151515\ldots$ es un número racional

34)______ si $3\,(x+5) = 3 \times 4$ entonces, $x+5=4$

35)______ $(-8)(-x) = -8x$

36)______ si $x^2 = 0$, entonces $x = 0$

37)______ si, $(x-2)(x+3)=10$, entonces $x-2=10$ ó $x+3=10$

38)______ si $(t+4)(t-5)=0$, entonces $t+4=0$ ó $t-5=0$

39)______ $\dfrac{0}{z^2+8} = 0$

40)______ $\dfrac{a+b}{b} = a+1$

Resolver las siguientes operaciones con números reales

41) $-(3-4)+2[6-8\,(-2+2)]$

42) $-\{-(8+6)-[-(7-11)\,]\}$

43) $7+\{6-4-[2(5+8)-7(2-4)]\}$

44) $-[(4-3)-(5-8)]\times 3-\{-[-(5+4)]\}$

45) $\dfrac{3+(-3)}{8-(-5-4)}$

46) $\dfrac{5-16-(3-2)}{7-(8+5)}$

47) $\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{3}{15}$

48) $5-\dfrac{3}{4}-\dfrac{2}{5}$

49) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}-\sqrt[3]{-27}+\dfrac{7}{2}$

50) $\dfrac{5}{5}\times\left(6-\dfrac{1}{2}\right)$

51) $\left[\left(\dfrac{3}{7}+\dfrac{2}{7}\right)+\dfrac{1}{7}\right]-\dfrac{7}{14}$

52) $\left(\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{3}\right)\times\dfrac{30}{4}$

53) $\dfrac{\dfrac{3}{4}+\dfrac{5}{4}-1}{2-\dfrac{5}{4}+1}$

54) $\left(\dfrac{8}{3}-\dfrac{5}{11}\right)\times 33-73$

55) $\left(7-\dfrac{1}{3}\right)\div\left(\dfrac{1}{3}-2\right)\times 6$

56) $\left(\dfrac{\dfrac{5}{3}-\dfrac{3}{4}}{\dfrac{11}{12}}\right)\div\left(\dfrac{6}{5}-\dfrac{1}{5}\right)$

57) $\left(\dfrac{3}{5}\times\dfrac{10}{7}\right)\div\left(\dfrac{2}{9}\times 14\right)$

58) $2+\dfrac{2}{3+\dfrac{1}{2}}$

59) $\dfrac{\dfrac{9}{25}-\dfrac{2}{5}}{\dfrac{9}{25}+\dfrac{2}{5}}+\dfrac{1}{19}$

60) $\left[\dfrac{\dfrac{3}{50}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{4}{5}}{\dfrac{3}{25}+\dfrac{7}{10}}\right]\times\dfrac{41}{18}$

61) $5+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}}}}$

62) $\left(4-\dfrac{2}{1-\dfrac{1}{4}}\right)\div\left(7-\dfrac{3}{\dfrac{1}{3}-1}\right)$

63) $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2}}}$

64) $\left(1+\dfrac{2}{3}\right)\left(1+\dfrac{2}{4}\right)\left(1+\dfrac{2}{5}\right)\text{K}\left(1+\dfrac{2}{14}\right)$

Si $a=3$; $b=2$; $c=-5$ y $d=4$, hallar

65) $a+(b-c)$

66) $\dfrac{\sqrt{c^2-a^2}}{b}\div\dfrac{b}{d}$

67) $-\{a+c(-a+b+c)-(b-c)a\}+d$

68) $\dfrac{ab-cd}{b^2}+(-d-ab)$

69) $\left(a^2+b^2\right)\left(ab-c\right)\left(4b+8d\right)$

70) $\dfrac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$

71) $a+\left(b^2-c^2\right)-\left(d-a^2-c\right)$

72) $c\sqrt{3a}-d\sqrt{16b^2}+d\sqrt[3]{8d}$

73) $\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{b^2}{2}+\dfrac{d^2}{4}$

74) $\dfrac{a+b}{c}-\dfrac{b+d}{a}$

En los ejercicios 81 a 91, utilizar la notación de conjuntos y uno o más de los símbolos $<,>,\leq$ ***y*** $\geq$ ***para denotar el conjunto dado***

75) El conjunto de todas las x tal que x sea mayor que -4 y menor que 3

76) El conjunto de todas las x tal que $4x-3$ sea mayor que cero.

77) El conjunto de todas las x tal que $4x-3$ sea no negativo.

78) El conjunto de todas las y tal que $3y+5$ sea positivo.

79) El conjunto de todas las z tal que z sea mayor o igual que 7 y menor o igual que 10

80) El conjunto de todas las z entre -2 y 8

81) El conjunto de todas las x tal que x sea mayor que -18 y menor o igual que -12

82) El conjunto de todas las y tal que $2y-9$ sea no positivo.

83) El conjunto de todas las x tal que $6x$ sea mayor o igual que -30 y menor que -12

84) El conjunto de todas las x tal que $9x$ sea mayor o igual que -12 y menor que -30

85) El conjunto de todas las y tal que $24y+15$ esté entre –1 y 15 inclusive.

ACTIVIDAD 4

Conocimientos matemáticos básicos--Álgebra

POTENCIACIÓN RADICACIÓN

POTENCIACIÓN

Teoría de Exponentes

Si x y y son número reales y m y n números racionales (enteros o fraccionarios), entonces, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$, si $x \neq 0$
2. $x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$
3. $x^0 = 1$, si $x \neq 0$
4. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
5. $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n} = \dfrac{1}{x^{n-m}}$
6. $(x^m)^n = x^{mn}$
7. $(x\,y)^m = x^m y^m$
8. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^m = \dfrac{x^m}{y^m}$, con $y \neq 0$
9. $x^{-m} = \dfrac{1}{x^m}$, con $x \neq 0$
10. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{-n} = \dfrac{x^{-n}}{y^{-n}} = \dfrac{y^{\,n}}{x^{\,n}} = \left(\dfrac{y}{x}\right)^n$, con $x \neq 0$ y $y \neq 0$

Ejercicios sobre potenciación

Efectuar las siguientes operaciones aplicando la teoría de los exponentes. No deben aparecer exponentes negativos en la respuesta final.

1) $(x-y)^5(x-y)^{-3}(x-y)$

2) $\left[\dfrac{x^{2y}}{(x^{-1})^{-y}}\right]^{\frac{1}{y}}$

3) $\dfrac{x^{x+2} - 4x^{-x}}{x + 2x^{-x}}$

4) $x^{1/2}y^{1/3}\left(\dfrac{y^{1/4}}{x^{1/6}}\right)^2 \div \dfrac{y^{-1/4}}{x^{1/4}}$

5) $\dfrac{ma^{1/3}}{9nb} \div \left(\dfrac{3n^{1/2}a^{1/3}}{b^{-1/2}}\right)^{-2}$

6) $\left(x^{\frac{a}{b}}y^{-2}\right)^b \div \left(\dfrac{x^{a^2-b^2}}{y^{ab+b^2}}\right)^{\frac{1}{a+b}}$

7) $\left[\left(\dfrac{x^{-\frac{1}{c}}y^{\frac{b}{c}}}{x^{\frac{b+c}{c}}y^{\frac{1}{c}}}\right)^{-1} \div \left(\dfrac{x}{y}\right)^{\frac{b+c}{c}}\right]^c$

8) $\left[x\left(\sqrt[n]{x}\right)^{-\frac{1}{n}}\right]^{\frac{n^2}{1-n}} \cdot x^{n+1}$

9) $\dfrac{8^{\frac{x}{3}} \cdot 9^{\frac{3x}{2}} \cdot 10^{3x}}{125^x \cdot 27^{\frac{x}{3}} \cdot 6^{2x} \cdot 4^x}$

10) $\dfrac{(x^{m+n})^2(y^{m+n})^2}{(xy)^{2m-n}} \cdot (x^{m+2n})^{-1}$

11) $\left(\dfrac{p^b}{p^c}\right)^a \left(\dfrac{p^c}{p^a}\right)^b \left(\dfrac{p^a}{p^b}\right)^c$

12) $x\left[\left(\dfrac{x^n}{x}\right)^{n+1} \div x^{n-1}\right]^{\frac{1}{n}}$

13) $\left(a^{1+\frac{q}{p}}\right) \div \sqrt[p]{\dfrac{a^{2p}}{\left(a^{-1}\right)^{-p}}}$

14) $\left[x^{n+1} \cdot x^{2-n}\left(\dfrac{x^{n-1}}{x^{n+1}}\right)\left(x^{n+1}\right)^{n-1}\right]^{\frac{1}{n}}$

15) $\left[\dfrac{2^n\left(2^{n-1}\right)^n}{2^{n+1} \cdot 2^{n-1}} \cdot \dfrac{1}{4^{-n}}\right]^{\frac{1}{n^2}}$

16) $\dfrac{3^{n+1}}{\left(3^n\right)^{n-1}} \div \dfrac{9^{n+1}}{\left(3^{n-1}\right)^{n+1}}$

17) $\left[\dfrac{25^{\frac{n+1}{4}}\sqrt{5 \cdot 5^n}}{5\sqrt{5^{-n}}}\right]^{\frac{2}{n}}$

18) $\left(AK^{\alpha}L^{\beta}\right)\left(AK^{-\alpha}L^{\beta}\right)$

19) $x^2y^2\left(x+y\right)^{-2}\left(x^{-2}-y^{-2}\right)$

20) $\left(\dfrac{a^{-2}+a^{-1}b^{-1}}{a^{-2}-a^{-1}b^{-1}}\right)^{-1}$

RADICACIÓN

Simplificación de radicales

Caso 1: El exponente del radicando es divisible por el índice del radical.

Caso 2: Cuando el exponente del radicando es mayor que el índice pero no es divisible por éste, se descompone el radicando en dos factores de modo que el exponente de uno de ellos sea divisible por el índice.

Caso 3: Cuando los exponentes de los factores de la cantidad subradical y el índice tienen un divisor común lo que se hace es dividir el índice y los exponentes de los factores por su divisor común.

Caso 4: Si la cantidad subradical es una fracción hay que multiplicar ambos términos de la fracción por la cantidad necesaria para que el denominador tenga raíz exacta.

Introducción de cantidades bajo el signo radical

$$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

Radicales semejantes

Si dos o más radicales tienen el mismo índice y el mismo radicando, se dice que son semejantes. Para determinar si dos o más radicales son semejantes es necesario simplificarlos previamente.

Suma y resta de radicales

Para sumar o restar radicales es necesario simplificarlos previamente y luego reducir los radicales semejantes.

Multiplicación de radicales

Caso 1: Para multiplicar dos o más radicales del mismo índice se multiplican los radicales y se escribe el mismo índice. En este caso simplemente se aplica la propiedad

$$\sqrt[n]{x}\ \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$$

Caso 2: Para multiplicar radicales de distinto índice es necesario escribirlos primero en el mismo índice y luego se procede como en el caso anterior. La propiedad fundamental es,

$$\sqrt[n]{x}\ \sqrt[m]{y} = \sqrt[p]{x^{\frac{p}{m}}}\ \sqrt[p]{y^{\frac{p}{m}}} = \sqrt[p]{x^{\frac{p}{n}}\ \ y^{\frac{p}{m}}}$$

$p \in \mathrm{N}$, es el común índice, que resulta de hallar el mínimo común múltiplo de los índices, n y m

División de radicales

Para dividir radicales se procede exactamente en la misma forma como se hizo para la multiplicación de radicales.

El proceso de la división de radicales se fundamenta en las propiedades,

Caso 1:

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$$

siendo x y y números reales, $y \neq 0$ y n un número natural mayor o igual que 2

Caso 2:

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[m]{y}} = \frac{\sqrt[p]{x^{\frac{p}{n}}}}{\sqrt[p]{y^{\frac{p}{m}}}} = \sqrt[p]{\frac{x^{\frac{p}{n}}}{y^{\frac{p}{m}}}}$$

Potenciación de radicales

Principio fundamental de la radicación: Toda raíz es igual a una potencia con exponente fraccionario, cuyo numerador es el exponente del radicando y el denominador es el índice de la raíz, decir,

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

siendo *n* el índice de la raíz i *m* el exponente del radicando

Las siguientes propiedades son de utilidad para elevar radicales a una potencia.

Sean a, b y m números reales y n un número natural mayor o igual que 2

1. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
2. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$
3. $\left(a\ \sqrt[n]{b}\right)^m = a^m\ \sqrt[n]{b^m}$

Radicación de radicales

Sea a un número real y m y n números naturales mayores o iguales que 2

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Racionalización de denominadores

En todos los casos el denominador es:

Caso 1: un monomio con raíz cuadrada.

Caso 2: un monomio con raíz n-sima.

Caso3: un binomio de la forma $a\sqrt{x} \pm b\sqrt{y}$

Caso 4: un binomio de la forma $\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{b}$

Caso 5: una expresión que contiene tres radicales de segundo grado.

Caso 6: una expresión que contiene tres radicales de grado 3

Ejercicios sobre radicación

Simplificar los siguientes radicales

1) $4\sqrt[3]{250a^3b^8}$ 2) $\sqrt[3]{64x^7y^{-6}}$

3) $\sqrt[8]{a^2+2ab+b^2}$ 4) $\sqrt[3]{\dfrac{(x+1)^3}{(y-2)^6}}$

5) Introducir la cantidad bajo el signo radical. $4x^2\ \sqrt[3]{y^2}$

Efectuar las siguientes operaciones de radicales

6) $(3x-3y)\sqrt{\dfrac{1}{x-y}}-(x+y)\sqrt{\dfrac{x-y}{x+y}}+(x-y)\sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$

7) $2a\cdot\sqrt[3]{27x^3y}+3b\cdot\sqrt[3]{8x^3y}+6c\cdot\sqrt[3]{x^3y}$ 8) $2\sqrt{\dfrac{a}{b}}-3\sqrt{\dfrac{b}{a}}+\dfrac{4}{ab}\sqrt{ab}$

8) $\left(2\sqrt{x-1}-\sqrt{2}\,x\right)\left(3\sqrt{x-1}+2\sqrt{2}\,x\right)$ 9) $\left(-3\cdot\sqrt[6]{x+1}\right)^3$

9) $\dfrac{3\cdot\sqrt[3]{81}-6\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}}$ 13) $\dfrac{8\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[4]{y}\cdot\sqrt{z^{-1}}}{2\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{y^5}\cdot\sqrt{z}}$

12) $\left(\sqrt{6+3\sqrt{3}}\right)\left(\sqrt{6-3\sqrt{3}}\right)$

Racionalizar el denominador de

14) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4\cdot\sqrt[3]{2}}$ 15) $\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{5\sqrt{3}-\sqrt{32}-2\sqrt{12}+\sqrt{50}}$ 16) $\dfrac{7}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}}$

17) $\dfrac{\sqrt[3]{3}-1}{\sqrt[3]{3}+1}$ 18) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}-\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16}}$

19) Efectuar la siguiente operación: $\dfrac{1}{x-\sqrt{x^2-y^2}}-\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2-y^2}}$

20) Simplificar totalmente: $\left[\left(\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a-b}}-\dfrac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}}\right)^{-1}\cdot\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b}\right]\div\left(\dfrac{a^2}{b^2}-\dfrac{2a}{b}+1\right)^{\frac{1}{2}}$

ACTIVIDAD 5

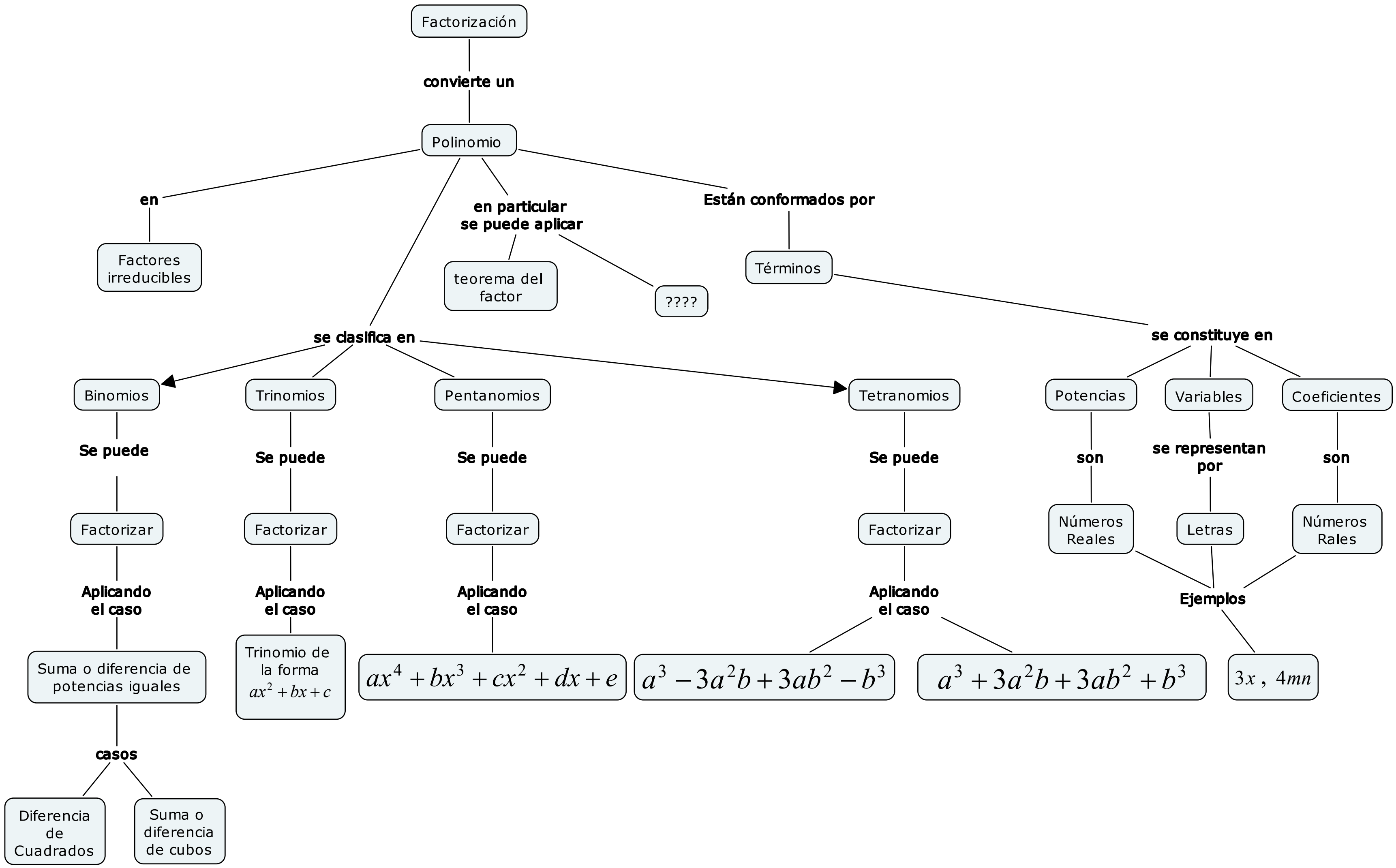
Conocimientos matemáticos--Álgebra

PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

El trabajo algebraico como procedimiento lógico y ordenado, ayuda a sustentar la implementación y aplicación de cualquier modelo matemático que se quiera tratar. Así, el Álgebra, se presenta como una buena herramienta para ***hacer*** matemáticas.

Temas importantes entonces, como, las operaciones con expresiones algebraicas, la teoría de exponentes, los productos notables y la factorización sobre el conjunto de los números reales, como caso particular, son requerimientos indispensables, para un posterior desempeño con éxito, en los temas que se tratarán en el primer curso de matemáticas en la Universidad.

Para la factorización, el tema más complejo de los ya mencionados, se proporciona una visión general en un mapa conceptual, que da cuenta de la importancia de esta operación algebraica.


Factorización
convierte un
Polinomio
en
Factores irreducibles
en particular se puede aplicar
teorema del factor
????
Están conformados por
Términos
se clasifica en
Binomios
Trinomios
Pentanomios
Tetranomios
Se puede
Factorizar
Aplicando el caso
Suma o diferencia de potencias iguales
casos
Diferencia de Cuadrados
Suma o diferencia de cubos
Trinomio de la forma ax^2+bx+c
$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$
$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
se constituye en
Potencias
Variables
Coeficientes
son
se representan por
Números Reales
Letras
Números Rales
Ejemplos
$3x\,,\ 4mn$

PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

En el desarrollo de la diferentes asignaturas que encontrará el estudiante, a lo largo de su carrera, directa o parcialmente relacionadas con las matemáticas, requerirá del manejo de ciertas herramientas que generalmente considera como conocidas y aprendidas, pero que muchas veces descubre que tal manejo no existe, y esto impide avanzar en los procesos matemáticos posteriores.

Las operaciones entre polinomios constituyen uno de estos elementos necesarios para estudiar el álgebra, por lo tanto se presenta a continuación una pequeña introducción al producto entre polinomios y como consecuencia de éstos los productos notables y un repaso a la factorización.

Las dos operaciones fundamentales del Álgebra son la suma y la multiplicación algebraicas y los elementos matemáticos que en ellas intervienen son respectivamente: los términos asociados a la suma, es decir, los sumandos y los factores asociados a la multiplicación que son los multiplicandos.

Inicialmente es importante recordar que un monomio es una expresión algebraica que consta de un solo término donde la variable (o variables) tiene(n) exponente(s) entero(s) positivo(s) o cero, así:

SON MONOMIOS	**NO SON MONOMIOS**
$3x^2$	$\frac{1}{2}\sqrt{x}$
$\frac{5}{3}xz^5$	$\frac{5z}{2x^3}$
$\frac{2x^3}{4}$	$4x^{-2}$

El exponente de la variable constituye el grado del monomio y el factor constante es llamado el coeficiente del mismo. Si se suman dos monomios del mismo grado, monomios semejantes, se obtiene un nuevo monomio donde el coeficiente está dado por la suma de los coeficientes de los monomios iniciales, siendo la(s) variable(s) la(s) misma(s); ahora bien, si se suman dos monomios de diferente grado la operación no se podrá realizar en tanto la variable no asuma un valor constante o numérico, por tanto la suma se dejará indicada y se dará origen a una nueva expresión algebraica que se llamará binomio; esto es, un binomio es la suma de dos monomios de diferente grado.

SON BINOMIOS	**NO SON BINOMIOS**
$3x^2 + 2x$	$3\sqrt[3]{x^2} + 2x^3$
$\frac{3}{2}x^5 - \frac{5x}{4}$	$5x^4 + \frac{2z}{x^3}$
$\sqrt{3}\,x^3 + \frac{2}{3}x^2$	$7x^{-2} - 12x$

$$x^{52}+458x^{7} \qquad 2x^{-3}+\sqrt{2}\,x^{4}$$

$$3x^{4}-5x^{2} \qquad 2x^{5}+\frac{2}{x^{3}}$$

Para sumar dos binomios se deberán operar aquellos monomios que tengan el mismo grado, esto es, sumando monomios semejantes, el resultado podrá ser: un binomio, un trinomio, o en general un polinomio.

Producto entre polinomios

Inicialmente, para efectuar el producto de un monomio por un monomio, se multiplican los coeficientes constantes de cada monomio entre sí y las variables iguales entre sí, recordando que para multiplicar variables iguales se aplica una de las propiedades ya vistas para la potenciación.

Ejemplo 1

$$\left(5x^{2}\right)\left(3x^{3}\right)=(5\times 3)\left(x^{2}\cdot x^{3}\right)=15x^{5}$$
$$\left(\frac{5}{3}x^{5}\right)\left(2x^{2}\right)=\left(\frac{5}{3}\times 2\right)\left(x^{5}\cdot x^{2}\right)=\frac{10}{3}x^{7}$$

Ejercicios 1

1) $\left(12x^{3}\right)\left(\frac{1}{2}x\right)$ b) $\left(\sqrt{8}\,x^{2}\right)\left(\sqrt{2}\,x^{3}\right)$

2) $\left(3x^{12}\right)\left(2x^{2}\right)$ d) $\left(4x^{5}\right)(7)$

Para multiplicar un monomio por un binomio se aplicará la propiedad distributiva de los números reales, esto es, el monomio se multiplicará por cada término del binomio y luego se procede a reducir los términos semejantes de ser posible, como muestran los siguientes ejemplos.

Ejemplos 2

$$\left(5x^{2}\right)\left(3x^{3}+5x^{4}\right)=\left(5x^{2}\cdot 3x^{3}\right)+\left(5x^{2}\cdot 5x^{4}\right)=15x^{4}+25x^{6}$$
$$\left(\frac{3}{2}x^{3}\right)\left(\frac{1}{3}x^{2}-x^{4}\right)=\left(\frac{3}{2}x^{3}\cdot\frac{1}{3}x^{2}\right)-\left(\frac{3}{2}x^{3}\cdot x^{4}\right)=\frac{3}{6}x^{3+2}-\frac{3}{2}x^{3+4}=\frac{1}{2}x^{5}-\frac{3}{2}x^{7}$$

Ejercicios 2

1) $3x^{3}\left(\frac{3}{2}x^{2}+x\right)$ b) $\left(8x^{5}\right)\left(\sqrt{2}x^{3}-x^{2}\right)$

2) $\left(3x^{7}\right)\left(2x^{3}-2\right)$ d) $\left(4x^{5}\right)\left(7x^{2}-\frac{1}{2}x^{6}\right)$

Una vez se ha operado a la perfección el producto de un monomio por un polinomio se puede proceder a generalizar la propiedad distributiva y aplicarla al producto de un polinomio por un polinomio. El siguiente gráfico muestra como se soluciona un binomio elevado al cuadrado, aplicando el concepto de potenciación y posteriormente el producto entre dos binomios.

Ejemplos 3

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Se puede notar además que al resolver este producto se obtiene un polinomio particularmente especial, observar que el resultado está constituido por la suma del cuadrado de cada uno de los términos que constituyen el binomio más el doble producto. Existen múltiples productos especiales que presentan comportamientos de interés, en estos casos se está resolviendo un producto notable.

PRODUCTOS NOTABLES

Son productos de algunos polinomios que tienen resultados interesantes y que se resuelven por simple inspección. Tal es el caso del binomio al cuadrado presentado en el ejemplo anterior.

Ejercicios 3

Efectuar los siguientes productos como notables

1) $(a+b)^2$
2) $(a-b)^2$
3) $(a+b)^3$
4) $(a-b)^3$
5) $(a+b)(a-b)$
6) $(a-b)(a^2+ab+b^2)$
7) $(a+b)(a^2-ab+b^2)$
8) $(a+b)(a+c)(ab)$
9) $(a-b)(a+c)$

Los productos anteriormente planteados son llamados productos notables; ayudan a agilizar procesos algebraicos por la forma simplificada como se resuelven.

FACTORIZACIÓN

Factorizar un polinomio consiste en expresarlo en términos de factores irreducibles o primos en un conjunto dado, es decir, polinomios con el menor grado posible.

Ejercicios 4

Comparar los polinomios de la siguiente tabla con los resultados obtenidos en los productos de los Ejercicios 3 para hallar el producto que lo representa.

1) Diferencia de cuadrados: $a^2 - b^2$
2) Trinomio cuadrado perfecto: $a^2 + 2ab + b^2$
3) Trinomio cuadrado perfecto: $a^2 - 2ab + b^2$
4) Suma de cubos: $a^3 + b^3$
5) Diferencia de cubos: $a^3 - b^3$
6) Factor común: $xa + xb + xc$
7) Trinomio de la forma $a^2 + (b + c)a + bc$
8) Trinomio de la forma $a^2 + (b - c)a + bc$

Ejemplo 4

Factorizar los siguientes polinomios

1) $4xy^5 - 16x^6 y$

Solución. observa que en cada término del polinomio aparecen las variables x, y y que $MCD(4,16) = 4$

$$4xy^5 - 16x^6 y = 4xy\left(y^4 - x^5\right) \text{ (factor común)}$$

El factor común en este caso es un monomio, pero puede darse el caso de que sea un binomio, un trinomio,...

2) $9 - 16x^2$

Solución. $9 - 16x^2 = (3 + 4x)(3 - 4x)$

(diferencia de cuadrados)

3) $x^2 + 2x - 35$

Solución. $x^2 + 2x - 35 = (x - 5)(x + 7)$

(trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c, \quad con \quad n \in Z^+$)

4) $x^2 - 5x - 14$

Solución. $x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x + 2)$

(trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + c$)

5) $(a + b)^2 - (a + 3)^2$

Solución. $(a + b)^2 - (a + 3)^2 = [(a + b) + (a + 3)][(a + b) - (a + 3)] = [2a + b + 3][b - 3]$

(diferencia de cuadrados)

Ejercicios 5

Factorizar los siguientes polinomios en el conjunto de los números reales.

1) $x^2 - 4x^3y^4$
2) $x^2y^3z^6 - 16x^7y^5$
3) $4xy^5 - 16x^6y$
4) $a^2 + 2ab + b^2$
5) $x^2 - 169$
6) $49x^2 - 28xy + 4y^2$
7) $x^2 - 10x - 24$
8) $35 + 2y - y^2$
9) $7x - xy + 14 - 2y$
10) $x^2 - y^2$
11) $x^2 - 4$
12) $(7x - 2y)^2 - a^2$
13) $(x+2)^2 - (7-y)^2$
14) $64x^2 - 144y^2$
15) $12x^4y - 48x^2y$
16) $x^2 - 144$
17) $(7x+2y)^2 - (7x-2y)^2$
18) $49x^2 - 4y^2$
19) $5x^2 - 27x - 18$
20) $4x^2 + x - 33$
21) $z^5x^3 - 4x^3$
22) $4xy^5 - 16x^6y + 4y^6 - 16y^2x^5$
23) $70x^2 - 20xy - 168x + 48y$
24) $49x^2 - y^2 + 7x - y$
25) $4x^2 + 4xy + x + + y$
26) $3x^2 + 3xy + x + y$
27) $147x^3 + 49x^2 - 12y^2x - 4y^2$
28) $a^2x^2 - 169a^2 + 2abx^2 - 338ab + b^2x^2 - 169$
29) $4g^2 + 12gh + 12g + 9h^2 + 18h + 9$
30) $2gx + 4g + 3hx + 6h + 3x + 6$
31) $z^5x^2 - 4z^5x^3y^4 - 4x^5 + 16x^6y^4$
32) $12x^5y - 48x^3y - 24x^4y + 96x^2y$
33) $x - y$, como una diferencia de cuadrados
34) $x + 8$, como una suma de cubos
35) $7x^2 - 5y^2$